



# Etude harmonique des SLCI



Renaud Costadoat  
Lycée Dorian



Introduction

Diagrammes de Bode

## Introduction

Vous êtes capables :

- de résoudre des équations différentielles à l'aide du coefficient de surtension ou de qualité s'écrit : à l'aide des transformées de Laplace,
- de représenter des réponses impulsionnelles et indicielles,
- de représenter un SLCI à l'aide d'un schéma blocs.

Savoir

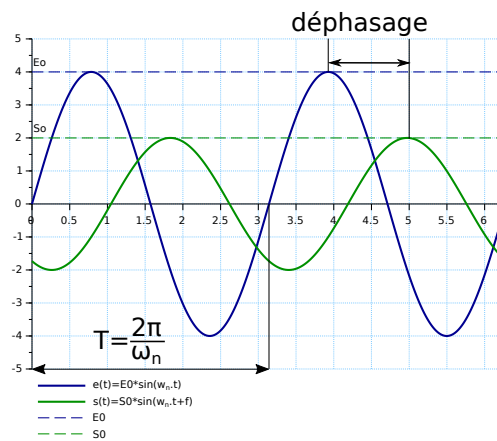
Vous devez être capables :

- d'effectuer l'étude harmonique d'un système,
- de représenter cette étude sur les diagrammes adéquats.

Problématique

## Réponse harmonique

Lorsque l'entrée d'un SLCI est un signal sinusoïdal du type  $e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$ , sa sortie en régime permanent est de la forme  $s(t) = S_0 \cdot \sin(\omega_n \cdot t + f)$ .



On appelle réponse harmonique, la sortie  $s(t)$  en régime permanent d'un système soumis à une entrée  $e(t)$  périodique.



## Les diagrammes harmoniques

Les courbes  $e(t)$  et  $s(t)$  dessinées ne sont valables que pour la pulsation  $\omega_n$  du signal d'entrée. La représentation temporelle ne sera donc plus suffisante dans le cadre de cette étude.

L'objet d'une étude fréquentielle d'un système est d'étudier l'évolution du **gain** et de la **phase**, en fonction de la variation de la valeur de la pulsation  $\omega$  du signal d'entrée, sur la réponse harmonique du système.

L'étude fréquentielle d'un système, consiste en l'étude, par la méthode des complexes, de la fonction de transfert du système  $H(p)$  :

- le **gain** du système  $\frac{S_0}{E_0}$  qui est égal au module du nombre complexe  $H(j\omega)$  :  $\frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$
- la **phase** du système  $\varphi$  qui est égale à l'argument du nombre complexe  $H(j\omega)$  :  
 $\varphi = \arg(H(j\omega))$

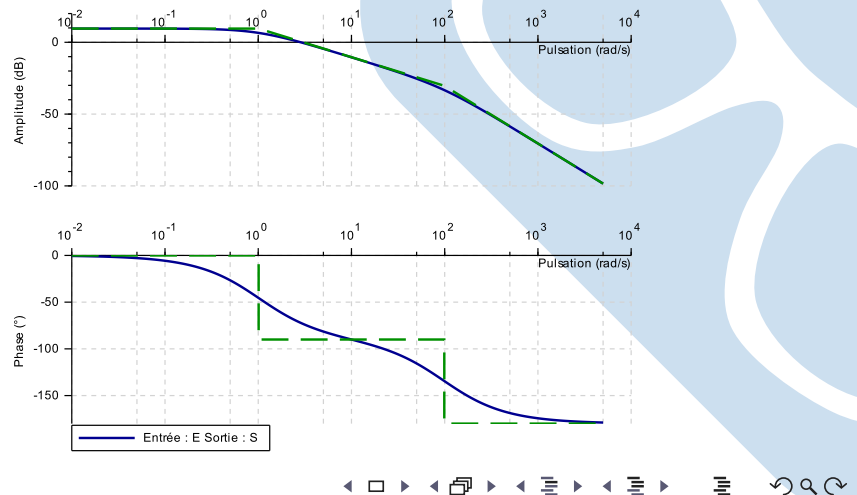


## Diagramme de Bode

Plusieurs diagrammes permettent de décrire le comportement fréquentiel d'un système : Bode, Nyquist, Black. Dans un premier temps, nous nous limiterons à l'utilisation du diagramme de Bode.

Il est constitué de deux courbes correspondant aux tracés du module et la phase de  $H(j\omega)$  en fonction de la pulsation sur une échelle logarithmique en base 10.

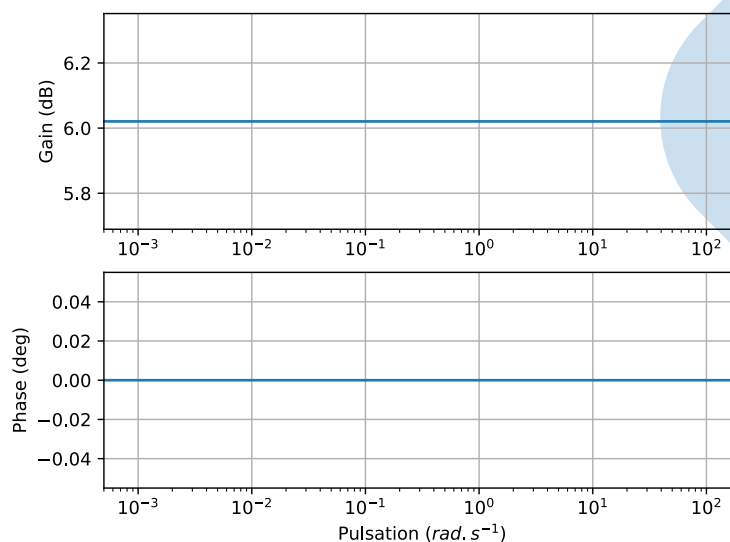
- Le module  
 $G_{db} = 20 \cdot \log|H(j\omega)|$   
 est exprimé en décibel.
- La phase  $\varphi$  est  
 exprimée en degrés.



## Cas du gain pur

$$H(p) = K$$

- $G_{db} = 20 \log|K|$
- $\varphi = \arg(K) = \arctan\left(\frac{0}{K}\right) = 0.$

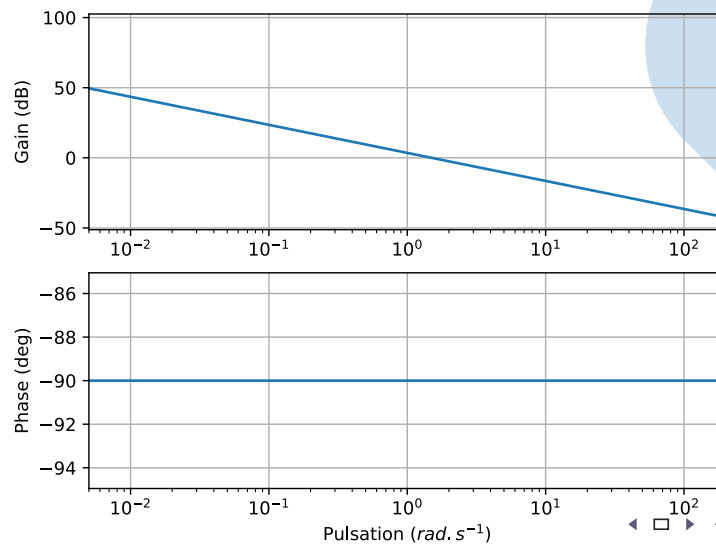


## Cas de l'intégrateur

$$H(p) = \frac{K}{p}$$

- $G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{p} \right| = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$

- $\varphi = \arg \left( \frac{K}{j\omega} \right) = -\arctan \left( \frac{\omega}{0} \right) = -90.$



## Cas du premier ordre

Pour  $\omega \rightarrow 0$

- $G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{1+\tau.p} \right| = 20 \log(K) - 20 \log(1) = 20 \log(K)$

- $\varphi = \arg \left( \frac{K}{1+\tau.j\omega} \right) = -\arctan \left( \frac{0}{K} \right) = 0.$

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$

- $G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{1+\tau.p} \right| = 20 \log \left( \frac{K}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$

- $\varphi = \arg \left( \frac{K}{1+\tau.j\omega} \right) = -\arctan \left( \frac{+\infty}{K} \right) = -90.$

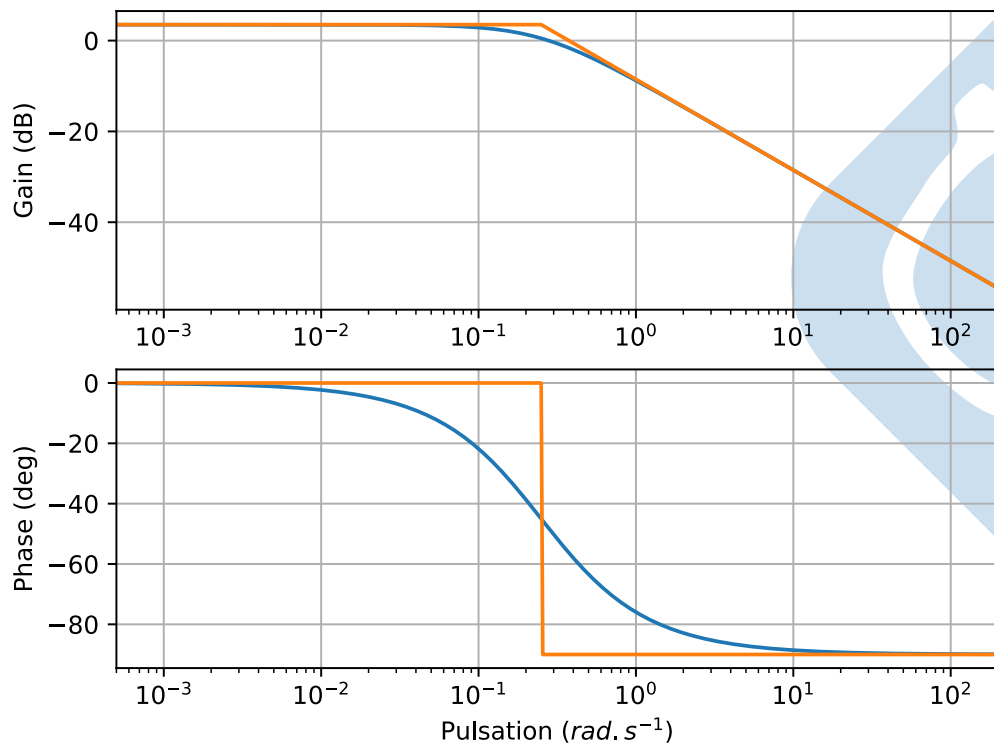
Pour  $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$ , pulsation de cassure.

- $G_{db} = 20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{2}} \right) = 20 \log(K) - 3 \text{ db}$

- $\varphi = \arg \left( \frac{K}{1+\tau.j\omega_c} \right) = -\arctan(1) = -45.$

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$

## Cas du premier ordre

Cas du second ordre ( $z > 1$ )

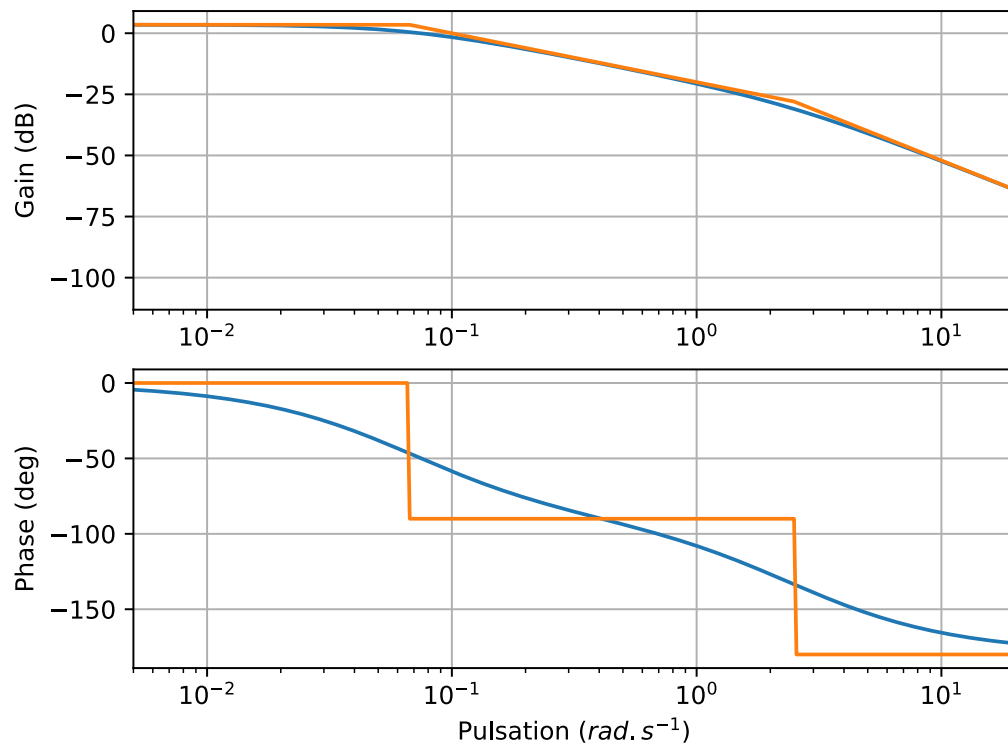
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Cas  $z > 1$ , alors  $H(j\omega) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot j \cdot \omega) \cdot (1 + T_2 \cdot j \cdot \omega)}$

- $G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{(1 + T_1 \cdot j \cdot \omega) \cdot (1 + T_2 \cdot j \cdot \omega)} \right| = 20 \log(K) - 10 \log(1 + T_1^2 \cdot \omega^2) - 10 \log(1 + T_2^2 \cdot \omega^2)$
- $\varphi = \arg \left( \frac{K}{(1 + T_1 \cdot j \cdot \omega) \cdot (1 + T_2 \cdot j \cdot \omega)} \right) = -\arctan(T_1 \cdot \omega) - \arctan(T_2 \cdot \omega)$ .

Pour  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}}$ , la courbe de phase passe toujours par  $-90$ .



Cas du second ordre ( $z > 1$ )Cas du second ordre ( $z=1$ )

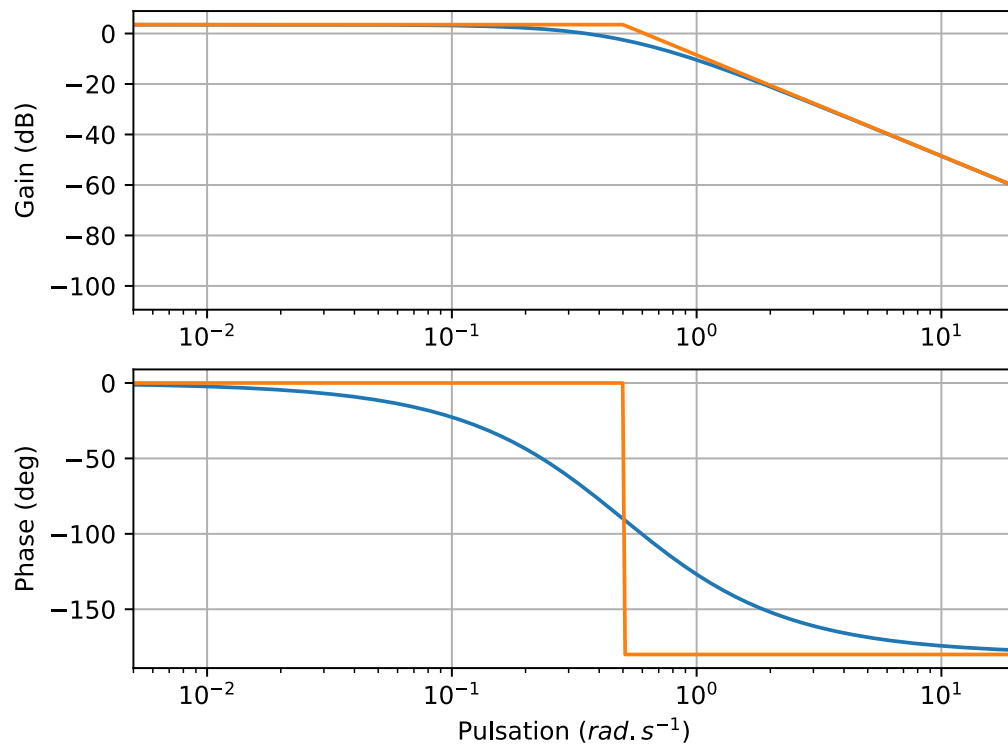
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

**Cas  $z=1$** , alors  $H(j\omega) = \frac{K}{(1+T \cdot j \cdot \omega)^2}$

- $G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{(1+T \cdot j \cdot \omega)^2} \right| = 20 \log(K) - 20 \log(1+T^2 \cdot \omega^2)$
- $\varphi = \arg \left( \frac{K}{(1+T_1 \cdot j \cdot \omega) \cdot (1+T_2 \cdot j \cdot \omega)} \right) = -2 \cdot \arctan(T \cdot \omega)$

Pour  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}}$ , la courbe de phase passe toujours par  $-90$ .

## Cas du second ordre (z=1)



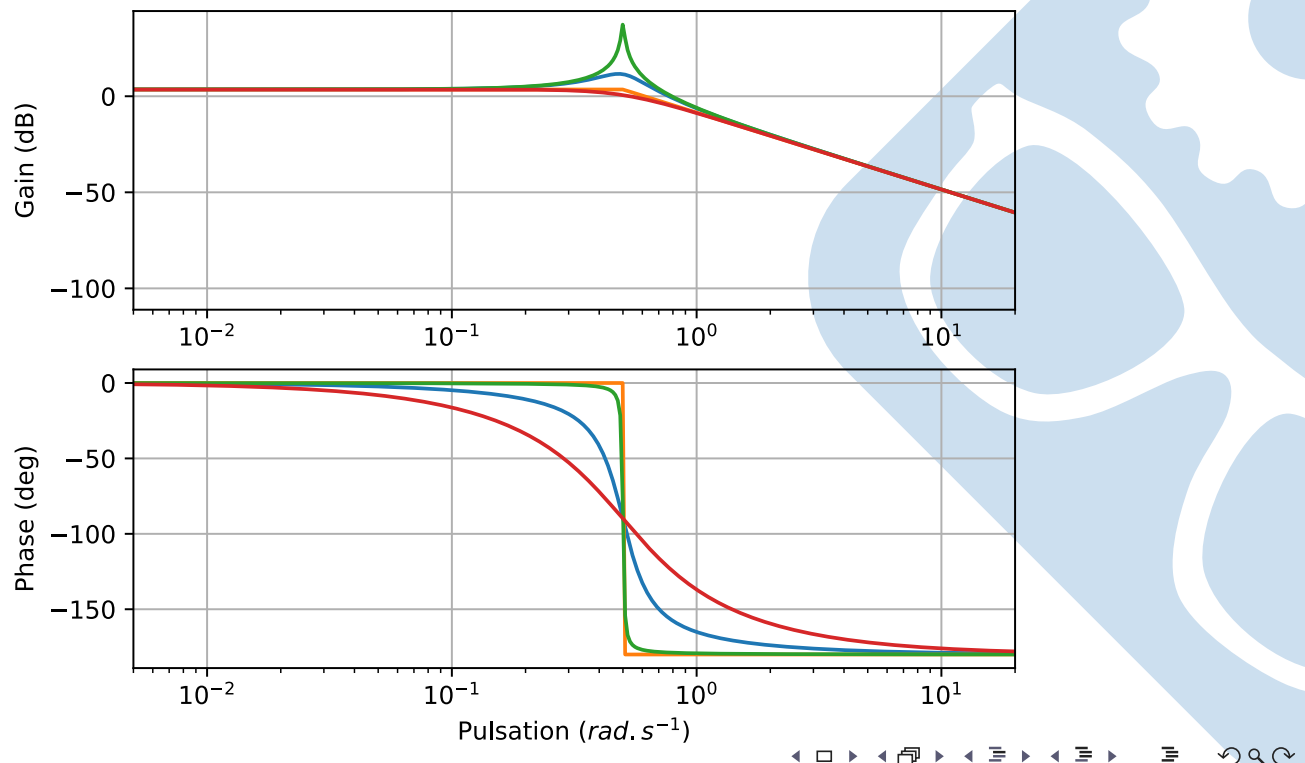
## Cas du second ordre (z&lt;1)

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Cas  $z < 1$ , alors  $H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{2 \cdot z \cdot \omega}{\omega_0}}$

$$\bullet G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{2 \cdot z \cdot \omega}{\omega_0}} \right| = 20 \log(K) - 10 \log \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4 \cdot z^2 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)$$

$$\bullet \varphi = \arg \left( \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{2 \cdot z \cdot \omega}{\omega_0}} \right) = -\arctan \left( \frac{\frac{2 \cdot z \cdot \omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

Cas du second ordre ( $z < 1$ )

## Résonance

Une résonance apparaît, lorsque  $0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , cela se manifeste par la présence d'un pic sur la courbe de gain.

Celui-ci étant un maximum, il peut être calculé s'il existe, pour la pulsation  $\omega_r$  de la manière suivante:  $\frac{dG}{d\omega}(\omega_r) = 0$

$$\left[ \frac{d((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4.z^2.\omega_0^2.\omega^2)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_r} = 0$$

$$-4.\omega_r.(\omega_0^2 - \omega_r^2) + 8.z^2.\omega_0^2.\omega_r = 0.$$

La résonance apparaît donc à la pulsation  $\omega_r = \omega_0.\sqrt{1 - 2.z^2}$

Et sa valeur est  $\frac{|H(j.\omega)_{max}|}{|H(0)|} = \frac{1}{2.z.\sqrt{1 - z^2}}$ .



## Conclusion

Savoir

Vous êtes capables :

- de construire les diagrammes de Bode à partir de fonctions de transfert,
- d'identifier des fonctions à partir de la lecture de ces diagrammes ou des tracés temporels.

Problématique

Vous devez être capables :

- de mettre en place une correction de l'asservissement en vue du respect du cahier des charges.